

Sonderabdruck aus der „Zeitschrift für Vermessungswesen“

83. Jahrgang 1958, Heft 7 und 9

Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart

LIBRARY
BOREAL INSTITUTE
MAR 16 1961



Vorwort:

Die Internationale Glaziologische Grönland-Expedition (EGIG) ist ein gemeinsames Unternehmen von 5 Ländern: Dänemark, Deutschland, Frankreich, Österreich, Schweiz. Sie wurde von der Dänischen Regierung gebilligt und steht unter dem Patronat der Kommission für Schnee und Eis (Internationale Assoziation für Wissenschaftliche Hydrologie in der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik).

Die EGIG wird durch ein Direktions-Komitee geleitet, dessen Präsident Professor Dr. R. Finsterwalder, München, ist. Expeditionsleiter ist P.-E. Victor, Paris. Die Organisation und Durchführung der Expedition liegt in den Händen der Expéditions Polaires Françaises, Paris.

A. Bauer
Generalsekretär der EGIG.

Lagemessungen bei der Internationalen Glaziologischen Grönland-Expedition (EGIG) 1959

Von Walther Hofmann, München

Die Aufgabe, die der Geodäsie von der Glaziologie im Rahmen der Internationalen Glaziologischen Grönland-Expedition (Expédition Glaciologique Internationale au Groenland = EGIG) gestellt ist, wurde in dieser Zeitschrift durch H. Lichte [1] eingehend behandelt (siehe auch [2]). Sie besteht vor allem in der Einmessung von Punkten auf dem grönländischen Inlandeis mit einer mittleren Genauigkeit von ± 2 m für die Lage und von ± 1 m für die Höhe. Die Punkte liegen in zwei Profilen, deren erstes das Inlandeis in westöstlicher Richtung von der Umanaq-Bucht bis Cecilia Nunatak überquert, während das zweite etwa 100 km hinter dem Westrand des Inlandeises in nordsüdlicher Richtung verläuft (siehe Kartenskizze Abb. 1). Die Länge des West-Ost-Profiles beträgt 820 km, die des Nord-Süd-Profiles 300 km. Als Vermarkung sind 10 m lange Aluminiumrohre in Abständen von je 10 km vorgesehen, die drei Meter tief in den Firn eingebohrt werden und demnach 7 m über die Oberfläche aufragen. Diese Stangen dienen zugleich als Pegel für die Messung des Schneeauftrages über dem Inlandeis. Aus ihrer geodätischen Festlegung soll bei einer Wiederholung in angemessenem zeitlichem Abstand ihre Veränderung nach Lage und Höhe abgeleitet und damit die Fließbewegung des Eises in den beiden Profilen bestimmt werden. Die geforderte Genauigkeit der Einmessung resultiert aus den bisher bekannten Werten für die Eisbewegung, die — je nach der Stelle im Inlandeis — in der Größenordnung von einigen Metern pro Jahr in horizontaler Richtung liegt. Für die vertikale Bewegung sind noch keine zuverlässigen Angaben bekannt. Nach den Erfahrungen der Expéditions Polaires Françaises (EPF) ist zu erwarten, daß die Mehrzahl der Pegel durch mindestens 10 Jahre erhalten bleibt und wieder aufgefunden werden kann. Die geodätischen Messungen erhalten ihren eigentlichen Sinn erst dann, wenn sie innerhalb dieses Zeitraumes wiederholt werden können.

Die Wahl der geodätischen Meßmethoden ist außer von den geforderten Genauigkeiten von den besonderen Verhältnissen des Arbeitsgebietes und den operationellen Möglichkeiten der Expedition abhängig.

POLAR
PAM
5762

POLAR PAM

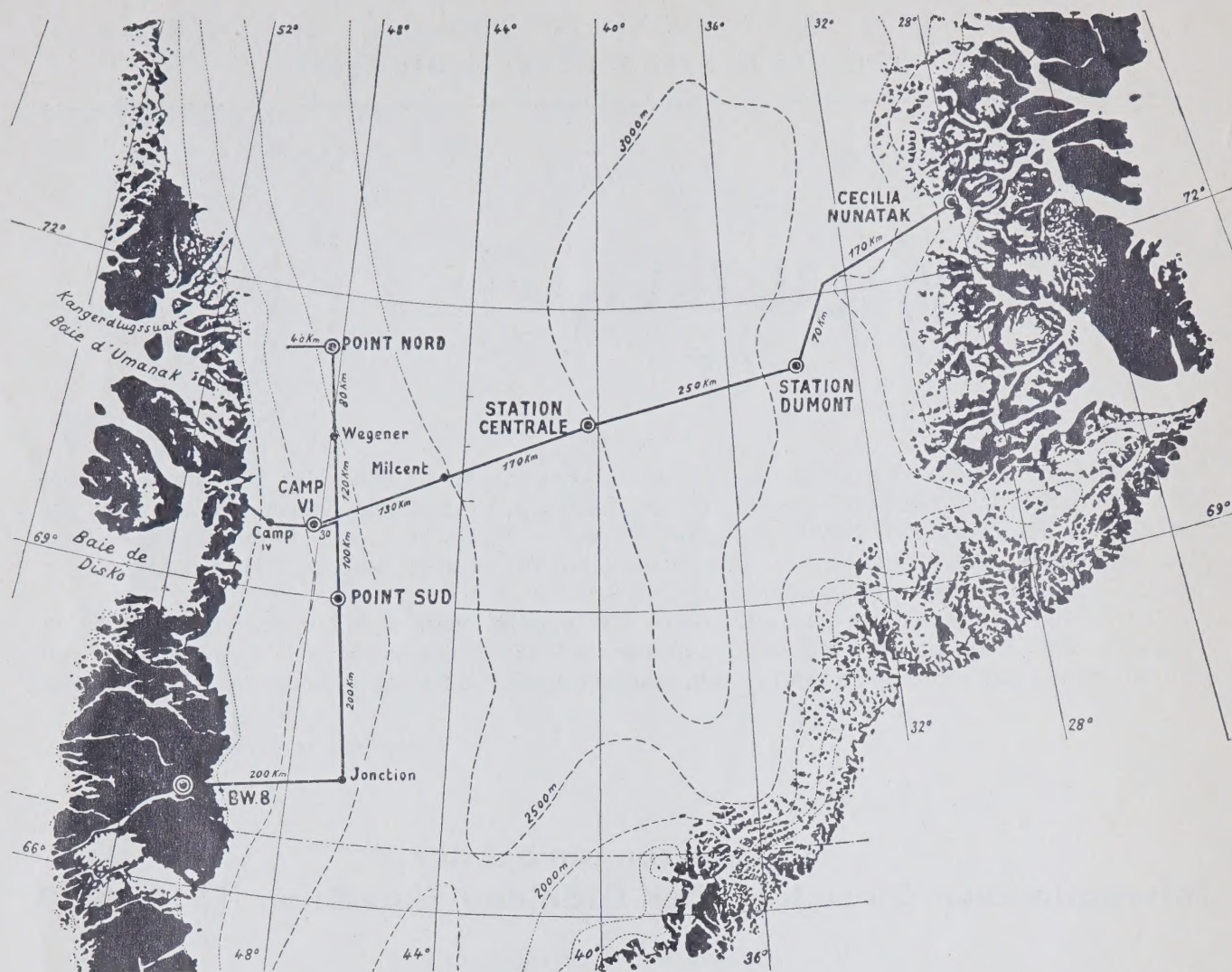


Abb. 1: Kartenskizze des Arbeitsgebietes der EGIG in Mittelgrönland.
(Zeichnung: Expéditions Polaires Françaises)

Für die Höhenbestimmung im W-O-Profil wurde nach eingehenden Erwägungen das geometrische Nivellement gewählt. Methodisch folgt es dem Vorschlag des motorisierten, gleichzeitigen Doppelnivellements, wie er von H. Lichte [1] entwickelt wurde. Nachdem geklärt werden konnte, daß sich die Raupenfahrzeuge (Weasel) der EPF für ein solches Nivellement eignen, hat sich diese Methode — nach einigen unbedeutenden Modifikationen gegenüber dem Vorschlag Lichtes — im Rahmen der technischen Möglichkeiten und des Zeitplanes der EGIG als die zweckmäßigste erwiesen. Es wird jedoch noch die Frage geprüft, ob für die EGIG ein Höhenintegrator beschafft und erprobt werden kann, der im Falle seiner Bewährung die Höhenmessung weit rationeller durchzuführen erlaubte.

Die Höhenmessung im N-S-Profil, an die geringere Genauigkeitsansprüche gestellt werden, erfolgt durch trigonometrische Höhenmessung.

Die Methode der Lagemessung

Die glaziologischen Untersuchungen sind im wesentlichen an zwei gestreckte Profile gebunden. Die Versorgungsdepots der Expedition werden längs dieser Linien errichtet. Hieraus ergibt sich von selbst die Beschränkung der geodätischen Lagemessung auf die beiden Pegelprofile und ihre nächste Umgebung. Es kommen also nur linienhafte Methoden in Betracht: Der Polygonzug oder die Kette aus einfachen geometrischen Figuren, die entlang des Pegelprofiles verläuft. Da in beiden Fällen die Zahl der Seiten bzw. Maschen so gering als möglich gehalten werden muß, ist als Element des Zuges bzw. der Kette der vorgegebene Abstand von 10 km zwischen zwei Folgepegeln anzustreben.

Infolge der ständigen Bewegung des Inlandeises gilt jede Messung nur für den Zeitpunkt, in dem sie durchgeführt wurde. Bei einer Aneinanderreihung von Messungen müssen

daher systematische Fehler auftreten, deren Größe vor allem von dem Zeitraum abhängt, den die Messungen erfordern. Ihre Elimination ist durch gleichzeitige Messungen in der Gegenrichtung oder durch Wiederholung der Messungen möglich. Bei nahezu gleichschnellem Arbeitsfortschritt und unter der Annahme eines von der Zeit linear abhängigen Verlaufes der Bewegungen könnten solche Doppelmessungen auf einen mittleren Zeitpunkt reduziert und bezogen werden. Jedoch schließen die beschränkten Mittel der Expedition ein solches Verfahren in der verfügbaren Zeit aus. Während für die Höhenmessung die Vertikalbewegung des Eises im Meßzeitraum innerhalb der angestrebten Genauigkeit nicht ins Gewicht fällt, geht die Horizontalbewegung mit ihren weit größeren Beträgen zum Teil in die Lagemessung ein. R. Haefeli hat in [3] die Horizontalbewegung im West-Ost-Profil auf Grund theoretischer Überlegungen abgeschätzt. Darnach ist mit einer Vergrößerung der Strecke zwischen Lager VI (Anfangspunkt des Profils) und einem Punkt mit der Horizontalbewegung Null in der Mitte des Inlandeises von ca. 100 m pro Jahr oder ca. 0,3 m pro Tag zu rechnen. Unter der Annahme gleichmäßigen Arbeitsfortschrittes ergibt sich hieraus ein systematischer Fehler der Längenmessung von rund 15 cm pro Meßtag. Bei einem Zeitbedarf von ca. 20 Tagen für die genannte Distanz von etwa 450 km wird also die Gesamtstrecke um rund 3 m systematisch verfälscht. Mit ähnlichen Werten ist für den östlichen Teil des Profils gegen Cecilia Nunatak zu rechnen. Es ist jedoch zu bedenken, daß nicht so sehr die absolute Lage der Pegel innerhalb eines festen Koordinatensystems als vielmehr ihre relative Lage zueinander für die Glaziologie von Interesse ist. Werden die Messungen später mit derselben Methode und in derselben Richtung wiederholt, so ist zu erwarten, daß die systematischen Fehlereinflüsse sich nicht wesentlich geändert haben und damit die Relativ-Verschiebungen der Pegel mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt werden können.

1. Der Polygonzug

Als einfachste und rationellste Meßmethode bietet sich der Polygonzug an. Die direkte Messung seiner Seiten mit Meßbändern oder -drähten scheidet von vornherein aus. Aber auch die optische Distanzmessung oder -vergrößerung stößt in Grönland auf erhebliche Schwierigkeiten, die einerseits in den Geländebeziehungen, zum anderen in den außergewöhnlichen atmosphärischen Bedingungen begründet sind. Das Inlandeis ist auch in größerem Randabstand keineswegs eben sondern von Wellen und Stufen bis zu 20 m relativer Höhe durchzogen. Sichtweiten von 10 km sind daher ohne den Aufbau von Beobachtungstürmen, der im Rahmen der EGIG nicht in Betracht kommt, allein schon des Geländereiefs wegen nicht durchwegs möglich. Hinzu tritt die Sichtbehinderung durch den Feuchtigkeitsgehalt der bodennahen Atmosphäre, vor allem aber der Einfluß der atmosphärischen Strahlenbrechung, der auch bei horizontal angeordneter Hilfsbasis die Zuverlässigkeit der optischen Entfernungsübertragung weit unter das Maß der vorgegebenen Toleranz herabmindert. Mit welcher unregelmäßigen Refraktionsverhältnissen über dem Inlandeis gerechnet werden muß, geht aus der Arbeit von H. Lichte [1] klar hervor.

Als Ausweg bleibt somit nur die Anwendung eines der in letzter Zeit entwickelten Verfahren der elektrischen Entfernungsmessung. Geodimeter-Messungen scheiden dabei wiederum aus, da im Arbeitsgebiet während der Zeit der Expedition nie die für lichtelektrische Entfernungsmessungen notwendige Dunkelheit eintritt. So verspricht allein die Messung mit dem Tellurometer eine Genauigkeit der Polygonseiten von wenigen Dezimetern.

Mit ihrem vollen Gewicht und unumgebar wirken sich jedoch die Verhältnisse im Inlandeis auf die Winkelmessung aus. Das Oberflächenrelief kann die Verkürzung der Polygonseiten auf 5 km und weniger erfordern. Die Seitenrefraktion dürfte die mittlere Winkelunsicherheit der Theodolitmessung verdoppeln bis verdreifachen. Selbst schwache Nebelbildung über dem Eis, wie sie nach den Erfahrungen der EPF nicht selten eintritt, verhindert jede Winkelmessung und legt den Meßtrupp lahm.

Die Genauigkeit eines mit Tellurometer und Theodolit gemessenen Polygonzuges bleibt am Ostrand des Inlandeises auch bei günstigsten Verhältnissen hinter den gestellten Forderungen zurück. Bei Annahme eines gestreckten Zuges mit gleichlangen Seiten folgt der mittlere Längsfehler m_L der bekannten Formel

$$m_L = m_0 \cdot \sqrt{n}.$$

Wenn das Tellurometer — was noch fraglich ist — auch über dem grönländischen Inlandeis eine Genauigkeit der Streckenmessung von $m_0 = \pm 0,1$ m, wie sie von bisherigen Mes-

sungen bekannt geworden ist, zu erreichen gestattet, beträgt der Längsfehler bei Cecilia Nunatak ($n \approx 80$)

$$m_L \approx \pm 0.9 \text{ m.}$$

Soll die mittlere Querabweichung

$$m_q = L \frac{m_\beta}{\rho^{cc}} \cdot \sqrt{\frac{n}{3}}$$

dieselbe Größenordnung erhalten, so müßte eine mittlere Winkelgenauigkeit von

$$m_\beta \approx \pm 0.1 \text{ cc}$$

eingehalten werden, — ein Wert, der auf dem Inlandeis in der verfügbaren Zeit gewiß nicht zu erreichen ist. Bei einer Winkelgenauigkeit von ca. $\pm 5 \text{ cc}$, wie sie in Grönland erwartet werden kann, ergibt sich in Cecilia Nunatak ein Querfehler von ca. $\pm 35 \text{ m}$. Diese abgeschätzten Werte erhöhen sich mit $\sqrt{n}$, wenn — wie anzunehmen — mehr als $n = 80$ Polygonseiten eingeschaltet werden müssen.

Hieraus ergibt sich, daß in jedem Fall die Richtungsübertragung des Polygonzuges durch astronomische Azimutbestimmungen hoher Genauigkeit verbessert werden muß.

Der Hauptnachteil der Polygonmessung in Grönland besteht jedoch im Mangel einer durchgreifenden Kontrolle der Ergebnisse während der Messung selbst. An eine Doppelmessung durch zwei Gruppen, die gegenläufig arbeiten, kann aus Gründen der Personal- und Materialbeschränkung nicht gedacht werden. Die Messung auf dem Hin- und Rückweg durch dieselbe Gruppe kommt aus Zeitmangel nicht in Betracht. Aber auch dann könnte eine vorhandene Differenz erst am Ende der Messungen, d. h. am Ende der Expedition aufgedeckt und nicht mehr beseitigt werden. Ob am Ostrande des Inlandeises schon während der Expedition an Festpunkte angeschlossen werden kann, ist fraglich. Doch würde auch das Vorhandensein von Festpunkten an beiden Enden des Zuges noch keine eindeutige Kontrolle und Ausgleichsmöglichkeit liefern, da solche Punkte nach dem heutigen Stand der grönländischen Triangulation Punktsystemen angehören würden, die so gut wie keine Verbindung zueinander besitzen. Den Ergebnissen würde also bei dem möglichen Meßaufwand in jedem Fall ein hohes Maß von Unsicherheit anhaften.

Es gilt daher, nach einer Methode zu suchen, die bei tragbarem operationellem Aufwand eine während der Arbeit kontrollierbare Messung ermöglicht und zugleich den besonderen Verhältnissen auf dem Inlandeis angepaßt ist.

2. Die Diagonalen-Viereckskette

Als solche Methode ist die Messung einer Kette von geschlossenen, einzeln überbestimmten Polygonen zu betrachten. Um den operationellen Aufwand im Hinblick auf die verfügbare Zeit in vernünftigen Grenzen zu halten, kann die geodätische Arbeit dabei höchstens auf eine weitere Linie, die dem Pegelprofil parallel läuft, ausgedehnt werden. Unter den von G. Schelling [4] diskutierten und K. Gerke [5] referierten Kettenkonfigurationen scheiden daher alle jene aus, die Messungen auf drei parallel laufenden Linien verlangen (Ketten aus Rauten oder Quadraten mit Zentralpunkt und Kombinationen dieser Figuren). Übrig bleibt die Kette aus Diagonalen-Vierecken von angenähert quadratischer Form nach Abb. 2. Jedes Quadrat enthält bei Messung beider Diagonalen eine Überbestimmung. Da je zwei Quadrate eine Seite gemeinsam haben, ergibt sich weiter die Möglichkeit einer Ausgleichung über die ganze Kette hinweg.

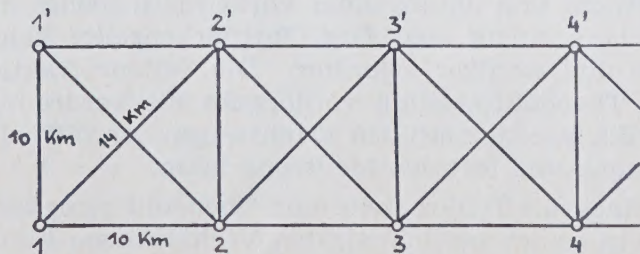


Abb. 2: Diagonalen-Quadratkette

Um von den Sichtverhältnissen über dem Inlandeis unabhängig zu werden, sollen Winkelmessungen ganz vermieden und lediglich die Seiten der Kette durch Streckenmessung mit dem Tellurometer gemessen werden. Nach den bisherigen Erfahrungen mit diesem Instrument bietet ein solches Verfahren in Grönland folgende Vorteile:

1. Die Messung wird vom Oberflächenrelief weitgehend unabhängig, da die elektrischen Wellen des Tellurometers sich sanften Unebenheiten des Geländes anschmiegen und nur durch Steilhänge und schroffe Wände, wie sie auf dem Inlandeis nicht vorkommen, gestört bzw. reflektiert werden.

2. Starke Luftfeuchtigkeit bis zur Nebelbildung stört die elektrische Entfernungsmessung nicht, sie erhöht im Gegenteil durch die größere Ausgeglichenheit der bodennahen Luftschichten gegenüber einer Strahlungswetterlage die Zuverlässigkeit der Entfernungsableitung aus der Wellenlaufzeit. Auch bei leichtem Schneefall kann noch gemessen werden. Die Messung gewinnt dadurch beträchtliche Wetterunabhängigkeit und wird nur noch durch ausgesprochene Schlechtwetter- oder Sturmlagen aufgehalten.

Die Messung mit dem Tellurometer in Bodennähe bei freiem Gelände läßt keinerlei störende Bodenreflexionen befürchten, wie sie bei Meßversuchen in gebirgigem Gelände aufgetreten sind. Da der Firn des grönländischen Inlandeises — im Gegensatz zu Fluß-, See- oder Meerwasser — als guter Isolator gelten kann, sind auch keine Störungen der Messung durch den Untergrund zu erwarten. Doch muß diese Frage durch Versuchsmessungen über Schneeflächen noch eingehend geprüft werden.

Die operationelle Durchführung der Lagemessung

Während für die Polygonmessung zwei Raupenfahrzeuge, die sich auf dem Pegelprofil selbst bewegen, genügen, kann die Viereckmessung zeitlich nur durchgeführt werden, wenn die Gruppe Lagemessung über 4 Weasel verfügt. Diese bewegen sich zu je zweien auf den beiden Längsseiten der Kette, also auf dem Pegelprofil und einer Parallelen dazu in 10 km Abstand. Jede Halbgruppe ist mit mindestens einer vollständigen Tellurometer-Ausrüstung (Master und Remote Station) versehen.

Verfahrensmäßig lassen sich verschiedene Anordnungen in der Reihenfolge der einzelnen Streckenmessungen aufstellen. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen:

1. Die Seiten jedes Vierecks müssen in zeitlicher Aufeinanderfolge gemessen werden, da sich die Tellurometer-Geräte bei gleichzeitiger Messung in relativ geringer Distanz stören, auch wenn sie nicht gegeneinander gerichtet sind.

2. Der Gruppe Lagemessung, die als erste wissenschaftliche Arbeitsgruppe der Expedition die Profile des Inlandeises durchfährt, obliegt auch die Errichtung der Pegelstangen. Da die Seiten auf jeden Fall von Zentrum zu Zentrum gemessen werden sollen, kann ein Pegel erst jeweils nach der Messung eines vollständigen Vierecks gesetzt werden. Diese Arbeit ist daher der auf dem Pegelprofil nachfahrenden Halbgruppe zuzuordnen. Für das Setzen eines Pegels ist ein Zeitbedarf von ca. 1 Stunde zu veranschlagen.

Unter diesen Voraussetzungen erweist es sich als zweckmäßig, einer der beiden Master Stationen des Tellurometers eine dritte Remote Station beizugeben. Ein Arbeitsschema, wie es sich bei dieser Verteilung ergibt, ist in Abb. 3 wiedergegeben. Die Weaselgeschwindigkeit ist dabei mit 10 km/h, der Zeitbedarf für die Messung einer Seite mit 30 Minuten angenommen.

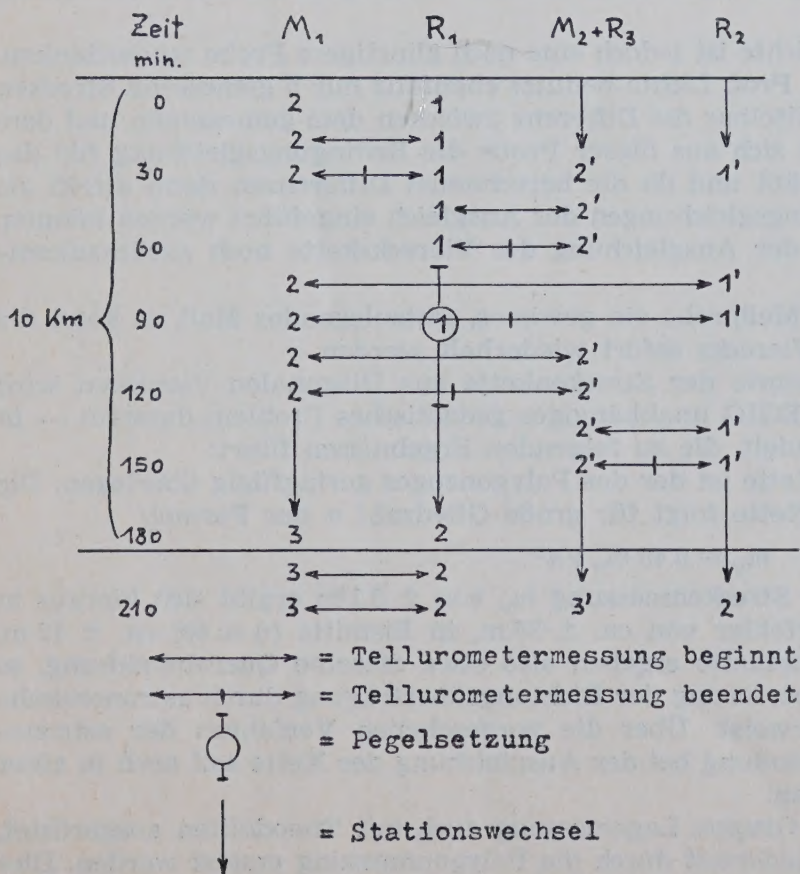


Abb. 3: Arbeitsschema für Tellurometermessung

Ausrüstung: Weasel I : Master Station M_1
Weasel II : Remote Station R_1
Weasel III: Master Station M_2 und Remote Station R_3
Weasel IV: Remote Station R_2 .

Der Zeitbedarf für die Messung der 5 Strecken einer Vierecksmasche von 10 km Seitenlänge ergibt sich zu 3 Stunden, so daß pro Tag durchschnittlich 3 Maschen gemessen und ein Arbeitsfortschritt von 30 km erzielt werden kann. Für die Gesamtkette sind Zuschläge für die astronomische Azimutbestimmungen und wegen schlechten Wetters zu berücksichtigen.

Für das reibungslose Ineinandergreifen der Arbeitsgänge und Stationswechsel ist enge Verbindung zwischen den Meßtrupps notwendig. Sie soll durch Sprechfunkanlagen zwischen den 4 Weaseln der Tellurometergruppe hergestellt werden.

Durch sorgfältige Navigation nach dem Kompaß und mit dem sehr genauen Kilometerzähler des Weasels soll außerdem erreicht werden, daß die angestrebte Quadratform der Kettenglieder so genau als möglich eingehalten wird.

Reduktion und Verprobung der Messungen

Die Tellurometerwerte sollen sofort nach der Messung eines Vierecks soweit reduziert werden, daß eine Verprobung der gemessenen Strecken möglich wird. Die Höhenunterschiede der Meßstationen, die zur Reduktion auf einen Horizont benötigt werden, werden auf dem Inlandeis den Betrag von 100 m nicht überschreiten; sie sollen durch barometrische Höhenmessung bestimmt werden.

Für die Meßprobe selbst bietet sich zunächst eine Flächenprobe an, die schon von E. Hammer in [6] zur Ableitung der Bedingungsgleichung im Diagonalenviereck benutzt wurde: Die Summen der beiden Dreiecksflächenpaare, in die jedes Viereck durch seine Diagonalen zerlegt wird, müssen gleich sein. Diese Probe hat den Vorteil, daß zu ihrer Durchführung nur die gemessenen Seiten selbst benötigt werden, aus denen die Dreiecksflächen nach der Heronischen Formel berechnet werden können. Doch versagt sie im Falle von Quadraten und quadratähnlichen Vierecken. Seitenfehler vom Betrag kleiner Größen 1. Ordnung bewirken in diesen Fällen erst einen Flächenfehler nächstniedrigerer Ordnung. Aus einem Stimmen der Flächenprobe kann also noch nicht auf die Widerspruchsfreiheit der Seiten geschlossen werden.

Einer Mitteilung von Prof. H. Lichte ist jedoch eine noch günstigere Probe zu verdanken, die frei von dieser Singularität ist. Prof. Lichte benutzt ebenfalls nur 5 gemessene Strecken als Eingangswerte und erhält unmittelbar die Differenz zwischen dem gemessenen und dem berechneten Wert der 6. Seite. Da sich aus dieser Probe die Bedingungsgleichung für das Diagonale-Viereck leicht ableiten läßt und da die berechneten Differenzen dann direkt als Widersprüche in die Fehlerbedingungsgleichungen der Ausgleich eingeführt werden können, wird auf sie bei der Behandlung der Ausgleichung der Viereckskette noch zurückzukommen sein [7].

Überschreitet die Differenz der Meßprobe ein gewisses, festzulegendes Maß, so kann die Streckenmessung des verprobten Vierecks sofort wiederholt werden.

Die Ausgleichung und Fehlertheorie der Streckenkette aus Diagonalen-Vierecken wird — da sie ein allgemeines, von der EGIG unabhängiges geodätisches Problem darstellt — in einer gesonderten Arbeit [7] behandelt, die zu folgenden Ergebnissen führt:

Die Maßstabsübertragung der Kette ist der des Polygonzuges geringfügig überlegen. Die mittlere Querabweichung m_q der Kette folgt für große Gliedzahl n der Formel:

$$m_q = 0.48 m_o \sqrt{n^3}.$$

Bei einem mittleren Fehler der Streckenmessung m_o von ± 0.1 m ergibt sich hieraus in Cecilia Nunatak ($n \approx 80$) ein Querfehler von ca. ± 35 m, in Eismitte ($n \approx 40$) ca. ± 12 m. Polygonzug und Diagonalen-Viereckskette ergeben also etwa dieselbe Querabweichung, so daß sich in beiden Fällen eine Verbesserung der Richtungsübertragung durch astronomische Zwischenazimute als notwendig erweist. Über die vorgesehenen Verfahren der astronomischen Messungen und ihre Verwendung bei der Ausgleichung der Kette soll noch in einer gesonderten Studie berichtet werden.

Wird — wie vorgesehen — die Gruppe Lagemessung auch mit Theodoliten ausgerüstet, so kann die Tellurometermessung jederzeit durch die Polygonmessung ersetzt werden. Dies wird notwendig sein:

1. Am östlichen Ende des W-O-Profiles, wo die Spaltengebiete der gegen Cecilia Nunatak abfallenden Ablationszone den Aufbau einer Viereckskette verbieten.

2. Bei der Lagemessung im N-S-Profil, wo infolge der trigonometrischen Höhenmessung der Pegelabstand nicht mehr als ca. 3 km betragen kann.

3. Bei Ausfall einer Tellurometer-Ausrüstung oder eines Fahrzeuges im Laufe der Messungen.

Anschluß der Lagemessung an geodätische Festpunkte

Im Westen soll das W-O-Profil mit seinem Endpunkt bei Lager VI an Festpunkte der dänischen Küstentriangulation angeschlossen werden. Die Spaltengefahr in der Ablationszone macht voraussichtlich die Fortbewegung mit Fahrzeugen über eine Linie 70—80 km hinter dem Eisrand hinaus unmöglich. Die Lagemessung ist deshalb hier — ebenso wie das Nivellement — auf die Unterstützung durch Hubschrauber angewiesen. Auch für den Küstenanschluß ist die reine Trilateration mit dem Tellurometer vorgesehen, wobei von den Festpunkten des Küstengebirges Streckenmessungen auf das ansteigende Inlandeis bis zu 30 km möglich sein werden. Dasselbe gilt für den Anschluß des Punktes Nord am Ende des N-S-Profiles an die Küste um den Fjord von Kangerdlugssuaq.

Da am Ostrand des Inlandeises keine Hubschrauber zur Verfügung stehen können, muß dort ein Anschluß des Profiles an geodätische Festpunkte zunächst unterbleiben. Dänemark hat jedoch den Anschluß von Cecilia Nunatak im Rahmen seiner triangulatorischen Arbeiten an der Ostküste in Aussicht gestellt.

Die vorgesehene Meßmethode läßt jedoch auch ohne Anschluß im Osten eine ausreichende Lagegenauigkeit für die Punkte des Pegelprofiles erwarten.

Literatur:

- | | |
|---|---|
| [1] Lichte, H.: Geodätische Messungen auf dem grönländischen Inlandeis. — ZfV 1957, S. 46—50, S. 65—73. | Längsfehler in Streckenkette. — Österr. ZfV 1952, S. 140—146, S. 187—192. |
| [2] Finsterwalder, R.: Geodäsie bei der Commission on Snow and Ice. — ZfV 1958, S. 171. | [5] Gerke, K.: Über die Berechnung von Streckennetzen. — ZfV 1954, S. 164—174. |
| [3] Haefeli, R. und Brentani, F.: Observations in a Cold Ice Cap. — Journal of Glaciology, Band 2, 1952—56, S. 571, S. 623—630. | [6] Hammer, E.: Zur Ausgleichung von Streckennetzen. — ZfV 1911, S. 517—532. |
| [4] Schelling, G.: Über die Grundfigur und die | [7] Hofmann, W.: Die freie Diagonalen-Viereckskette mit direkt gemessenen Strecken, ihre Ausgleichung und Fehlertheorie. — Wird demnächst veröffentlicht. |

Die freie Diagonalen-Viereckskette mit direkt gemessenen Strecken

Ihre Ausgleichung und Fehlertheorie

Von Walther Hofmann, München

Wie in einem vorangegangenen Artikel [11] dargelegt wurde, soll im Rahmen der geodätischen Arbeiten der Internationalen Glaziologischen Grönland-Expedition (EGIG) 1959 eine Kette von quadratförmigen Diagonalen-Vierecken über das grönländische Inlandeis durch reine Streckenmessung mit dem Tellurometer eingemessen werden. Die Kette dient der Lagebestimmung von Schneepegeln, die mit einem gegenseitigen Abstand von ca. 10 km in einem West-Ost-Profil über das Inlandeis errichtet werden. Die Gesamtlänge des Profils beträgt rund 800 km, so daß die Viereckskette aus etwa 80 Gliedern bestehen wird. Von der Glaziologie wird eine mittlere Lagegenauigkeit von ± 2 m für die Pegel gefordert.

Die Kette kann im Westen an Festpunkte der dänischen Küstentriangulation angeschlossen werden. Im Osten endet sie zwar auf festem Untergrund, doch ist die Möglichkeit ihres Anschlusses an Festpunkte noch fraglich. Ein solcher Anschluß würde zudem keine zuverlässige Kontrolle und Ausgleichung ermöglichen, da die Punkte der West- und Ostküste beim derzeitigen Stand der Triangulation in Grönland so gut wie keine Verbindung zueinander besitzen.

Im folgenden soll daher untersucht werden, wie die Ausgleichung der freien Kette in sich durchzuführen ist und mit welchen mittleren Lage- und Richtungsfehlern nach der Ausgleichung gerechnet werden muß.

1. Die Bedingungsgleichung im Diagonalen-Quadrat

Die geometrische Bedingung, die zwischen den 6 Seiten eines Diagonalen-Vierecks besteht, läßt sich auf verschiedene Weise herleiten. E. Hammer geht in [1] von einer Flächenbedingung aus. Die Summen der beiden Dreiecksflächenpaare, in die das Viereck durch seine Diagonalen zerlegt wird, müssen gleich sein. Die Dreiecksflächen können nach der Heronischen Formel durch die gemessenen Seiten ausgedrückt und die entstehenden Funktionen durch Entwicklung nach den Verbesserungen der Seiten linearisiert werden. Doch versagt diese Methode und die daraus abgeleitete Bedingungsgleichung im Falle von Quadraten und Rechtecken, bzw. quadrat- und rechteckähnlichen Vierecken. Sie ist daher im vorliegenden Fall nicht anwendbar.

K. Rinner stellt in [2] eine Diagonale des Vierecks über den Cosinus-Satz durch ihre Gegenwinkel und die übrigen Seiten dar und gewinnt durch Linearisierung eine Fehlerbedingungsgleichung, deren Widerspruch die Differenz zwischen der gemessenen und der berechneten Diagonalen ist. Zu einem Winkelwiderspruch gelangt man, wenn man nach K. Hubeny [3] und G. Schelling [4] die Winkelsummenbedingung im Zentralpunkt eines allgemeinen Zentralsystems ansetzt, wobei die Winkel durch die gemessenen Seiten ausgedrückt werden. Beide Wege sind auch für das Diagonalen-Quadrat gangbar, dessen Bedingungsgleichung bei K. Rinner explizit erscheint.

H. Lichte hat in einer persönlichen Mitteilung jedoch eine Verprobung für die gemessenen Strecken eines Diagonalen-Vierecks angegeben, die unmittelbar die gemessenen Seiten als Eingangsgrößen benutzt und aus der die Bedingungsgleichung besonders leicht und übersichtlich abgeleitet werden kann. Als Widerspruch der Fehlerbedingungsgleichung erscheint dabei der Widerspruch der Verprobung der Meßwerte. Im folgenden soll daher dieser Weg beschritten werden.

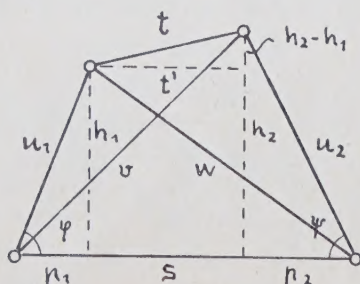


Fig. 1: Diagonalen-Viereck

Gemäß Figur 1 ist die Seite t durch die übrigen Seiten des Vierecks über folgende Beziehungen ausdrückbar:

$$t^2 = t'^2 + (h_2 - h_1)^2 \quad (1)$$

$$t = \sqrt{t'^2 + (h_2 - h_1)^2} \quad (1a)$$

$$t' = s - (p_1 + p_2) \quad (2)$$

$$p_1 = u_1 \cdot \cos \varphi = \frac{s}{2} - \frac{w^2 - u_1^2}{2s} \quad (3a)$$

$$p_2 = p_2 \cdot \cos \psi = \frac{s}{2} - \frac{v^2 - u_2^2}{2s} \quad (3b)$$

$$h_1^2 = u_1^2 - p_1^2 \quad h_1 = \sqrt{u_1^2 - p_1^2} \quad (4a)$$

$$h_2^2 = u_2^2 - p_2^2 \quad h_2 = \sqrt{u_2^2 - p_2^2} \quad (4b)$$

Die Gleichungen (1a) bis (4b) stellen die Verprobung dar, die für den Feldgebrauch in ein übersichtliches Schema zu bringen ist. Der Vergleich des gemessenen Wertes t mit dem berechneten (t) liefert dann die Bedingungsgleichung

$$t - (t) = 0,$$

deren linke Seite im Falle der Nichterfüllung gleich dem Widerspruch W ist:

$$W = t - (t). \quad (5)$$

Für die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen muß (t) durch Taylorentwicklung in eine lineare Form gebracht werden. Es gilt:

$$\text{Aus (1):} \quad t \, dt = t' \, dt' + (h_2 - h_1) (dh_1 + dh_2) \quad (6)$$

$$\text{Aus (2):} \quad dt' = ds - (dp_1 + dp_2) \quad (7)$$

$$\text{Aus (3a):} \quad s \, dp_1 = (s - p_1) \, ds + u_1 \, du_1 - w \cdot dw \quad (8a)$$

$$\text{Aus (3b):} \quad s \, dp_2 = (s - p_2) \, ds + u_2 \, du_2 - v \cdot dv \quad (8b)$$

$$(3a) + (3b): \quad s(dp_1 + dp_2) = (s + t') \, ds + u_1 \, du_1 + u_2 \, du_2 - v \cdot dv - w \cdot dw \quad (8c)$$

$$\text{Aus (4a):} \quad h_1 \, dh_1 = u_1 \, du_1 - p_1 \, dp_1 \quad (9a)$$

$$\text{Aus (4b):} \quad h_2 \, dh_2 = u_2 \, du_2 - p_2 \, dp_2 \quad (9b)$$

(7) bis (9) in (6):

$$\begin{aligned} t \, dt = & - \left[\frac{t'^2}{s} - (h_2 - h_1) \left(\frac{p_1}{h_1} \left(1 - \frac{p_1}{s} \right) + \frac{p_2}{h_2} \left(1 - \frac{p_2}{s} \right) \right) \right] \cdot ds \\ & - u_1 \left[\frac{t'}{s} + (h_2 - h_1) \frac{1}{h_1} \left(1 - \frac{p_1}{s} \right) \right] \cdot du_1 - u_2 \left[\frac{t'}{s} + (h_2 - h_1) \frac{1}{h_2} \left(1 - \frac{p_2}{s} \right) \right] \cdot du_2 \\ & + v \left(\frac{t'}{s} + (h_2 - h_1) \frac{1}{s} \cdot \frac{p_2}{h_2} \right) \cdot dv + w \left(\frac{t'}{s} + (h_2 - h_1) \frac{1}{s} \cdot \frac{p_1}{h_1} \right) \cdot dw \end{aligned} \quad (10)$$

Aus (10) ergibt sich die Fehlerbedingungsgleichung für ein allgemeines Diagonalen-Viereck, wobei zur Ermittlung der Koeffizienten teilweise graphische Methoden angewandt werden können.

Für das vorliegende Problem sei sogleich auf das Quadrat übergegangen, in dem folgende Beziehungen gelten:

$$s = t = t' = u_1 = u_2 = h_1 = h_2 = s; \quad v = w = s\sqrt{2}; \quad p_1 = p_2 = 0. \quad (11)$$

Damit wird aus (10):

$$s \, dt = -s \, ds - s \, du_1 - s \, du_2 + s\sqrt{2} \, dv + s\sqrt{2} \, dw$$

und nach Division mit s die Fehlerbedingungsgleichung für Diagonalen-Quadrate:

$$-v_s - v_t - v_{u1} - v_{u2} + \sqrt{2} \, v_v + \sqrt{2} \, v_w + W = 0. \quad (12)$$

2. Die Ausgleichung

Bei einer Diagonalen-Viereckskette, deren Folgeglieder jeweils eine Seite gemeinsam haben, hat die Ausgleichung die Bedingungsgleichungen (10) für alle Glieder zu berücksichtigen.

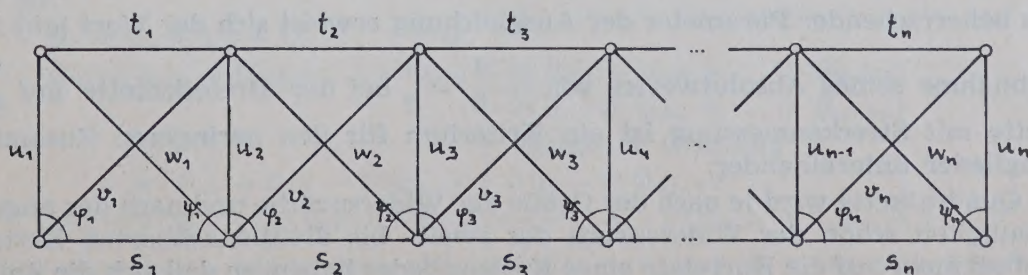


Fig. 2: Kette aus Diagonalen-Quadraten

tigen. Im allgemeinen Fall wird sich daher die gesonderte Ausgleichung der Einzelglieder und ihre Zusammenfügung nach dem Entwicklungsverfahren empfehlen. Bei einer Kette von n Diagonalen-Quadraten gestatten jedoch die für alle Glieder gleichen Koeffizienten der Bedingungsgleichungen (12) eine einfache und geschlossene Lösung.

Aus den $(5n + 1)$ Korrelatengleichungen

$$\begin{aligned} v_{u_i} &= -1 k_{i-1} - 1 k_i \\ v_{s_i} &= -1 k_i \\ v_{t_i} &= -1 k_i \\ v_{v_i} &= \sqrt{2} k_i \\ v_{w_i} &= \sqrt{2} k_i \\ v_{u_{i+1}} &= -1 k_i - 1 k_{i+1} \\ \dots\dots\dots \\ v_{u_{n+1}} &= -1 k_n \end{aligned} \quad i = 1 \dots (1) \dots n \quad (13)$$

folgen die n Normalgleichungen (in abgekürzter Schreibweise)

$$\begin{aligned} 8 k_1 + k_2 &+ W_1 = 0 \\ 8 k_2 + k_3 &+ W_2 = 0 \\ 8 k_3 + k_4 &+ W_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ 8 k_i + k_{i+1} &+ W_i = 0 \\ \dots\dots\dots \\ 8 k_n &+ W_n = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

deren Bau mit dem der Normalgleichungen für die Winkelbedingungen bei Dreiecksketten und -netzen identisch ist. Wie beim Boltzschen Entwicklungsverfahren läßt sich daher eine Entwicklung der Korrelaten nach den Widersprüchen angeben. Bezeichnet man der allgemeinen Übersicht wegen den Wert der Größen

$$[aa] = [bb] = \dots = [ii] = \dots = [nn] = 8$$

mit c , so sieht man, daß bei der Reduktion der Normalgleichungen Koeffizienten p_i auftreten, für welche mit der Festsetzung

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad (15)$$

die Rekursionsformel

$$p_i = c \cdot p_{i-1} - p_{i-2} \quad (16)$$

gilt. Zahlenmäßig nehmen im Falle der Diagonalen-Quadratkette die Größen p_i folgende Werte an:

$$\begin{array}{lll} p_0 = & 0 & p_4 = 496 \\ p_1 = & 1 & p_5 = 3\,905 \\ p_2 = & 8 & p_6 = 30\,744 \\ p_3 = & 63 & p_7 = 242\,047 \\ & & \dots\dots\dots \end{array} \quad (17)$$

Sie wachsen also praktisch mit $c^{i-1} = 8^{i-1}$.

Die quadratischen Reduktionskoeffizienten werden mit dieser Einführung:

$$[aa] = \frac{p_2}{p_1}, [bb.1] = \frac{p_3}{p_2}, \dots, [ii.(i-1)] = \frac{p_{i+1}}{p_i}, \dots, [nn.(n-1)] = \frac{p_{n+1}}{p_n} \quad (18)$$

und die Korrelate k_n ergibt sich zu:

$$k_n = -\frac{1}{p_{n+1}} (p_n W_n - p_{n-1} W_{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} p_1 W_1). \quad (19)$$

Der Einfluß der Widersprüche benachbarter Quadrate auf die Korrelate des n -ten Quadrates nimmt mit c^{1-q} ab, wenn q die Anzahl der dazwischenliegenden Kettenglieder bedeutet. Auch darin herrscht vollkommene Analogie zum Entwicklungsverfahren für Dreiecksketten.

Als beherrschender Parameter der Ausgleichung erweist sich der Wert $[ab] : [aa] = \frac{1}{c}$

und die Abnahme seines Absolutwertes von $\left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$ bei der Dreieckskette auf $\frac{1}{8}$ bei der Quadratkette mit Streckenmessung ist ein Kriterium für den geringeren Zusammenhang der Kettenglieder untereinander.

Bei der Quadratkette wird je nach der Größe der Widersprüche und nach der angestrebten Rechengenauigkeit schon der Widerspruch des zweit- bis drittbenachbarten Kettengliedes keinen Einfluß mehr auf die Korrelate eines Kettengliedes haben, so daß sich die Zahlenrechnung sehr schnell und einfach gestaltet.

Prinzipiell lassen sich alle Korrelaten als Funktionen der Widersprüche und der Größen p_i darstellen und berechnen. Doch wird die Rechnung bei langen Ketten unbequem. Die Korrelaten der vorausgehenden Glieder sind einfacher durch Einsetzen der schon bekannten Korrelaten in die Normalgleichungen zu ermitteln, wobei nur jeweils 2 Korrelaten in die Rechnung eingehen.

3. Funktionsgewichte

Die Gewichtsreziproken (Kofaktoren) Q_{FF} von beliebigen, linearisierten Funktionen der ausgeglichenen Strecken

$$F = f_o + [fv_m] \quad \begin{matrix} m = u_i, s_i \dots u_{i+1} \\ i = 1 \dots (1) \dots n \end{matrix} \quad (20)$$

lassen sich nach der Formel

$$Q_{FF} = [ff \cdot n] = [ff] - \left(\frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \dots + \frac{[nf \cdot (n-1)]^2}{[nn \cdot (n-1)]} \right) \quad (21)$$

berechnen [12]. Hierbei sind die quadratischen Reduktionskoeffizienten $[aa] \dots$ der Nenner durch (17) gegeben, während aus dem Normalgleichungssystem für die Zähler folgt:

$$\begin{aligned} [af] &= [af] \\ [bf \cdot 1] &= [bf] - \frac{p_1}{p_2} [af] \\ [cf \cdot 2] &= [cf] - \frac{p_2}{p_3} [bf] + \frac{p_1}{p_3} [af] \\ &\dots \dots \dots \\ [nf \cdot (n-1)] &= [nf] - \frac{p_{n-1}}{p_n} [(n-1)f] + \dots + (-1)^{n-1} \frac{p_1}{p_n} [af]. \end{aligned} \quad (22)$$

Doch wird die allgemeine Berechnung unübersichtlich, wenn viele Strecken der Kette an der Funktion F beteiligt sind. Es erscheint daher zweckmäßiger, zunächst nur die quadratischen und gemischten Kofaktoren der ausgeglichenen Strecken selbst zu bestimmen und die Gewichtsreziproke einer Funktion unter Einführung Tienstrascher Gewichtssymbole aus ihnen zusammenzusetzen. Dies empfiehlt sich im vorliegenden Fall besonders deshalb, weil — wie aus (22) hervorgeht — die Ausdrücke

$$\frac{[if \cdot (i-1)]^2}{[ii \cdot (i-1)]} \text{ bzw. } \frac{[if \cdot (i-1)] \cdot [ig \cdot (i-1)]}{[ii \cdot (i-1)]}$$

mit $c^{-2i} = 8^{-2i}$ sehr schnell gegen Null konvergieren, so daß bei der Zahlenrechnung in (21) nur wenige Glieder zu berücksichtigen sind.

Der symmetrische Bau der Kette und ihrer Glieder hat außerdem zur Folge, daß viele Kofaktoren einander gleich werden. Wie die folgende Zusammenstellung zeigt, treten außer drei quadratischen und fünf gemischten Kofaktoren im Einzelglied nur jeweils drei gemischte Kofaktoren auf, die den Zusammenhang zu den Folgegliedern regeln. Die Zahlenwerte nehmen dabei mit $c^{-(q+1)}$ ab, wenn q die Anzahl der Glieder bedeutet, die zwischen den beiden durch die Kofaktoren korrelierten Gliedern liegen.

Mit Hilfe dieser Kofaktoren sollen nunmehr die Gewichtsreziproken der drei charakteristischen Funktionen der Kette berechnet werden: Der Kettenlänge (Maßstabsübertragung), der Kettenrichtung (Richtungsübertragung) und der Querabweichung.

4. Gewicht und mittlerer Fehler der Kettenlänge

Die Länge L der Kette werde als Funktion der s_i betrachtet:

$$L = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \quad (23)$$

Damit gilt:

$$Q_L = Q_{s1} + Q_{s2} + Q_{s3} + \dots + Q_{sn} \quad 1) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Q_{LL} &= Q_{s1s1} + Q_{s2s2} + \dots + Q_{sn sn} + 2(Q_{s1s2} + Q_{s2s3} + \dots + Q_{sn-1sn}) \\ &\quad + 2(Q_{s1s3} + Q_{s2s4} + \dots + Q_{sn-2sn}) \\ &\quad + \text{Glieder 4. Ordnung} \\ &= n \cdot Q_{sisi} + 2(n-1) Q_{sisi+1} + 2(n-2) Q_{sisi+2} + \dots \\ Q_{LL} &= n(Q_{sisi} + 2 \cdot Q_{sisi+1} + 2 \cdot Q_{sisi+2} + \dots) - 2(Q_{sisi+1} + 2 Q_{sisi+2} + \dots). \end{aligned} \quad (25)$$

1) Die hinter den Seiten- und Winkelbezeichnungen $s, u, v, w, \beta, \varphi, \psi$ folgenden Zahlen und Buchstaben sind als deren Indizes zu lesen.

Tabelle 1: Zusammenstellung der quadratischen und gemischten Kofaktoren Q_{ik} der ausgeglichenen Strecken einer Diagonalen-Viereckskette

$i \ k$	Zahlenwerte		Art
$s_i s_i$	$+\frac{7}{8}$	$+0.875$	quadratische Q_{ik}
$u_i u_i$	$+\frac{6.25}{8}$	$+0.782$	
$v_i v_i = w_i w_i$	$+\frac{6}{8}$	$+0.750$	
$s_i u_i = s_i u_{i+1}$	$-\frac{7}{64}$	-0.109	gemischte Q_{ik} im selben Viereck (1. Ordnung)
$s_i v_i = s_i w_i$	$+\frac{\sqrt{2}}{8}$	$+0.177$	
$u_i u_{i+1}$	$-\frac{6}{64}$	-0.094	
$u_i v_i = u_i w_i = v_i u_{i+1} = w_i u_{i+1}$	$+\frac{7\sqrt{2}}{64}$	$+0.155$	
$v_i w_i$	$-\frac{2}{8}$	-0.250	
$s_i s_{i+1} = s_i u_{i+2} = u_i s_{i+1} = u_i u_{i+2}$	$+\frac{1}{63}$	$+0.016$	gemischte Q_{ik} in Folgevier- ecken (2. Ordnung)
$s_i v_{i+1} = s_i w_{i+1} = u_i v_{i+1} = u_i w_{i+1}$ $= v_i s_{i+1} = w_i s_{i+1} = v_i u_{i+2} = w_i u_{i+2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{63}$	-0.022	
$v_i v_{i+1} = v_i w_{i+1} = w_i v_{i+1} = w_i w_{i+1}$	$+\frac{2}{63}$	$+0.032$	
$m_i m_{i+2}$ Größenordnung:	$\frac{1}{496}$	0.002	(3. Ordnung)
$m_i m_{i+3}$ Größenordnung:	$\frac{1}{3905}$	0.0003	(4. Ordnung)

Durch Einsetzen der Zahlenwerte aus Tabelle 1 ergibt sich die Gewichtsreziproke der Kettenlänge zu

$$Q_{LL} = 0.903 \, n - 0.024 \quad (26)$$

und ihr mittlerer Fehler m_L mit m_o als mittlerem Fehler der Streckenmessung

$$m_L = m_o \sqrt{0.903 \, n - 0.024} \quad (27)$$

5. Gewicht und mittlerer Fehler der Kettenrichtung

Die Richtung Φ der Kette werde als Funktion der Brechungswinkel β_i aufgestellt:

$$\Phi = \sum_1^{n-1} \beta_i - (n-1) \cdot 2\pi \quad (28)$$

oder, da

$$\beta_i = \psi_i + \varphi_{i+1} \quad , \quad (29)$$

$$\Phi = \sum_1^{n-1} \psi_i + \sum_2^n \varphi_i - (n-1) \cdot 2\pi \quad . \quad (30)$$

Hieraus folgt:

$$Q_{\Phi} = \sum_1^{n-1} Q_{\psi_i} + \sum_2^n Q_{\varphi_i} \quad (31)$$

Nach dem Cosinus-Satz gelten zwischen den Winkeln ψ_i , φ_i und den Seiten des Diagonalen-Vierecks die Gleichungen

$$2 s_i u_{i+1} \cos \psi_i - s_i^2 - u_{i+1}^2 + v_i^2 = 0 \quad (32a)$$

$$2 s_i u_i \cos \varphi_i - s_i^2 - u_i^2 + w_i^2 = 0 \quad (32b)$$

aus denen die Differentialbeziehungen im allgemeinen Viereck

$$d\psi_i = \frac{1}{s_i u_{i+1} \sin \psi_i} (v_i dv_i - (s_i - u_{i+1} \cos \psi_i) ds_i - (u_{i+1} - s_i \cos \psi_i) du_{i+1}) \quad (33a)$$

$$d\varphi_i = \frac{1}{s_i u_i \sin \varphi_i} (w_i dw_i - (s_i - u_i \cos \varphi_i) ds_i - (u_i - s_i \cos \varphi_i) du_i) \quad (33b)$$

und im Diagonalen-Quadrat

$$d\psi_i = \frac{1}{s} (\sqrt{2} dv_i - ds_i - du_{i+1}) \quad (34)$$

$$d\varphi_i = \frac{1}{s} (\sqrt{2} dw_i - ds_i - du_i) \quad (35)$$

folgen. Benutzt man am Ende der Fehlerbetrachtung den relativen Streckenmeßfehler $\frac{m_0}{s}$, so kann in (34) und (35) $s = 1$ gesetzt werden, und es folgt:

$$Q_{\psi_i} = \sqrt{2} Q_{vi} - Q_{si} - Q_{ui+1} \quad (36a)$$

$$Q_{\varphi_i} = \sqrt{2} Q_{wi} - Q_{si} - Q_{ui} \quad (36b)$$

Damit geht (31) über in:

$$Q_{\Phi} = \sqrt{2} \sum_1^{n-1} (Q_{vi} + Q_{ui+1}) - 2 \sum_2^n (Q_{si} + Q_{ui}) - (Q_{s1} + Q_{sn}) \quad (37)$$

Für die Gewichtsreziproke $Q_{\Phi\Phi}$ der Richtungsübertragung ergibt sich bei Berücksichtigung von Gliedern bis zur 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} Q_{\Phi\Phi} = & 4n (Q_{sisi} + Q_{uiui} + Q_{vivi} + 4Q_{sivi} - 2\sqrt{2} \cdot Q_{sivi} + 2Q_{uiui+1} - 4\sqrt{2} Q_{uivi} \\ & + Q_{vivi} + 8Q_{sisi+1} - 8\sqrt{2} Q_{sivi+1} + 4Q_{vivi+1}) \\ & - 2(3 \cdot Q_{sisi} + 2Q_{uiui} + 2Q_{vivi} + 12Q_{sivi} - 6\sqrt{2} Q_{sivi} + 8Q_{uiui+1} - 12\sqrt{2} Q_{uivi} \\ & + 4Q_{vivi} + 40Q_{sisi+1} - 36\sqrt{2} Q_{sivi+1} + 16Q_{vivi+1}) \end{aligned} \quad (38)$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerte aus Tabelle 1:

$$Q_{\Phi\Phi} = 2.40 n - 1.37 \quad (39)$$

woraus der mittlere Fehler der Kettenrichtung

$$m''_{\Phi} = \varrho'' \frac{m_0}{s} \sqrt{2.40 n - 1.37} \quad (40)$$

folgt. Da Glieder bis zur 3. Ordnung berücksichtigt wurden, sind die Formeln (38) bis (40) nur für Ketten mit $n > 3$ anwendbar.

6. Gewicht und Mittelwert der Querabweichung der Kette

Für die Querabweichung q der Kette gilt:

$$q = s ((n-1) d\beta_1 + (n-2) d\beta_2 + (n-3) d\beta_3 + \dots + d\beta_{n-1}) \quad (41)$$

(siehe etwa [13], Bd. II/1, 9. Aufl. S. 554).

Damit wird

$$Q_q = s ((n-1) Q_{\beta_1} + (n-2) Q_{\beta_2} + (n-3) Q_{\beta_3} + \dots + Q_{\beta_{n-1}}) \quad (42)$$

und

$$\begin{aligned} Q_{qq} = & s^2 [(n-1)^2 Q_{\beta_1\beta_1} + (n-2)^2 Q_{\beta_2\beta_2} + (n-3)^2 Q_{\beta_3\beta_3} + \dots + Q_{\beta_{n-1}\beta_{n-1}}] & \text{Anzahl: } n-1 \\ & + 2((n-1)(n-2) Q_{\beta_1\beta_2} + (n-2)(n-3) Q_{\beta_2\beta_3} + \dots + 2Q_{\beta_{n-2}\beta_{n-1}}) & n-2 \\ & + 2((n-1)(n-3) Q_{\beta_1\beta_3} + (n-2)(n-4) Q_{\beta_2\beta_4} + \dots + 3Q_{\beta_{n-3}\beta_{n-1}}) & n-3 \\ & + 2((n-1)(n-4) Q_{\beta_1\beta_4} + (n-2)(n-5) Q_{\beta_2\beta_5} + \dots + 4Q_{\beta_{n-4}\beta_{n-1}}) & n-4 \\ & + \text{Korrelationsglieder über mehr als 4 Quadrate]. \end{aligned} \quad (43)$$

Die Berechnung der Kofaktoren $Q_{\beta_i \beta_k}$ nach (29) und (36) ergibt:

$$\begin{aligned} Q_{\beta_1 \beta_1} &= Q_{\beta_2 \beta_2} = \dots = Q_{\beta_{n-1} \beta_{n-1}} = + 2.759 \\ Q_{\beta_1 \beta_2} &= Q_{\beta_2 \beta_3} = \dots = Q_{\beta_{n-2} \beta_{n-1}} = - 1.352 \\ Q_{\beta_1 \beta_3} &= Q_{\beta_2 \beta_4} = \dots = Q_{\beta_{n-3} \beta_{n-1}} = + 0.354 \\ Q_{\beta_1 \beta_4} &= Q_{\beta_2 \beta_5} = \dots = Q_{\beta_{n-4} \beta_{n-1}} = - 0.040 \end{aligned} \quad (44)$$

Mit (44) wird aus (43):

$$\begin{aligned} Q_{qq} &= s^2 \left(Q_{\beta_i \beta_i} \sum_1^{n-1} (n-i)^2 + 2 \left(Q_{\beta_i \beta_{i+1}} \sum_1^{n-2} (n-i)(n-(i+1)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q_{\beta_i \beta_{i+2}} \sum_1^{n-3} (n-i)(n-(i+2)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q_{\beta_i \beta_{i+3}} \sum_1^{n-4} (n-i)(n-(i+3)) + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (45)$$

oder nach Ausrechnung der Summen der arithmetischen Reihen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} Q_{qq} &= s^2 \left(\frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n) Q_{\beta_i \beta_i} + \frac{1}{3} (2n^3 - 6n^2 + 4n) Q_{\beta_i \beta_{i+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (2n^3 - 9n^2 + 7n + 6) Q_{\beta_i \beta_{i+2}} + \frac{1}{3} (2n^3 - 12n^2 + 10n + 24) Q_{\beta_i \beta_{i+3}} + \dots \right) \\ &= s^2 \left[\frac{n^3}{3} (Q_{\beta_i \beta_i} + 2 Q_{\beta_i \beta_{i+1}} + 2 \cdot Q_{\beta_i \beta_{i+2}} + 2 Q_{\beta_i \beta_{i+3}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^2}{2} (Q_{\beta_i \beta_i} + 4 Q_{\beta_i \beta_{i+1}} + 6 \cdot Q_{\beta_i \beta_{i+2}} + 8 Q_{\beta_i \beta_{i+3}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{6} (Q_{\beta_i \beta_i} + 8 \cdot Q_{\beta_i \beta_{i+1}} + 14 \cdot Q_{\beta_i \beta_{i+2}} + 20 Q_{\beta_i \beta_{i+3}}) + 2 Q_{\beta_i \beta_{i+2}} + 8 Q_{\beta_i \beta_{i+3}} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Einsetzen der Zahlenwerte aus (44) ergibt:

$$Q_{qq} = s^2 (0.228 n^3 - 0.422 n^2 - 0.780 n + 0.388). \quad (47)$$

Die mittlere Querabweichung wird damit:

$$m_q = m_o \sqrt{0.228 n^3 - 0.422 n^2 - 0.780 n + 0.388}. \quad (48)$$

Der Anwendungsbereich der Formeln (47) und (48) beginnt bei $n > 4$.

7. Vergleich mit ähnlichen Kettenformen und mit dem Polygonzug

Es liegt nahe, die gewonnenen Ergebnisse mit den mittleren Abweichungen anderer geometrischer Konfigurationen zur linienhaften Längen- und Richtungsübertragung, die etwa gleichen Arbeitsaufwand erfordern und bei denen ebenfalls nur Strecken oder — wie beim Polygonzug — Strecken und Winkel gemessen werden, zu vergleichen.

Ketten, deren Meßstationen nur auf 2 Linien liegen, lassen sich zum Beispiel aus gleichseitigen oder rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken gemäß Figur 3 und 4 zusammensetzen. Da sie keine Überbestimmung enthalten, ist die Fehlerfortpflanzung in ihnen leicht zu überblicken.

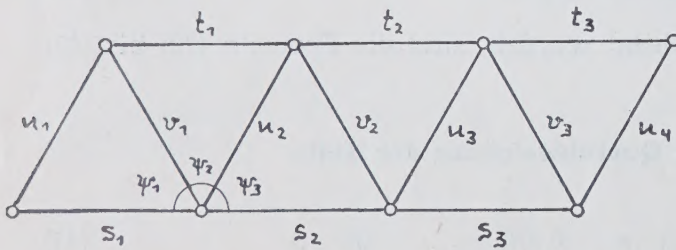


Fig. 3: Kette aus gleichseitigen Dreiecken

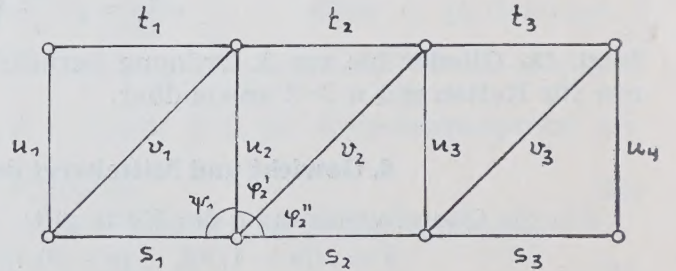


Fig. 4: Kette aus rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken

a) Die Kette aus gleichseitigen Dreiecken.

Unter sinngemäßer Anwendung der Formeln (33), (28) und (41) folgt:

$$\begin{aligned} m_{\psi_i} &= \frac{m_o}{s} \sqrt{2} \\ m_L &= m_o \sqrt{n} \\ m_{\Phi} &= \frac{m_o}{s} \sqrt{6(n-1)} \\ m_q &= m_o \sqrt{2n^3 - 3n^2 + n} \end{aligned} \quad (49)$$

Die Winkel ψ_i erhalten demnach hier dasselbe Gewicht $P_\psi = \frac{s^2}{2}$ wie die Winkel ψ_i und φ_i der Diagonalen-Quadratkette.

b) Die Kette aus rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken.

Auf demselben Wege wie bei a) ergibt sich:

$$\begin{aligned} m_{\psi_i}^{\Delta} &= 2 \frac{m_o}{s} \\ m_{\varphi_i}^{\Delta} &= \frac{m_o}{s} \sqrt{3} \\ m_L^{\Delta} &= m_o \sqrt{n} \\ m_{\Phi}^{\Delta} &= \frac{m_o}{s} \sqrt{10(n-1)} \\ m_q^{\Delta} &= m_o \sqrt{\frac{5}{3}(2n^3 - 3n^2 + n)} \end{aligned} \tag{50}$$

Die Winkel ψ_i erhalten hier mit $P_\psi = \frac{s^2}{4}$ nur die Hälfte, die Winkel $(\varphi_i + \varphi_i)$ mit $P_\varphi = \frac{s^2}{6}$ nur ein Drittel des Gewichtes der entsprechenden Winkel im Diagonalen-Quadrat. Hieraus läßt sich der Genauigkeitsgewinn der durch Messung der zweiten Diagonalen erzielt wird, klar übersehen.

c) Der Polygonzug.

Die Fehlerfortpflanzung im freien, gestreckten und gleichseitigen Polygonzug folgt bekanntlich den Formeln:

$$\begin{aligned} m_L^P &= m_o \sqrt{n} \\ m_{\Phi}^P &= m_{\beta} \sqrt{n} \\ m_q^P &= s \cdot m_{\beta} \sqrt{\frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n)} \end{aligned} \tag{51}$$

Um die Werte m_{Φ} und m_q mit denen der Diagonalen-Viereckskette vergleichen zu können, muß für m_{β} die mittlere Unsicherheit der Berechnungswinkel β_i eben dieser Kette eingesetzt werden. Sie beträgt nach (36) bzw. (37)

$$m_{\beta_i} = \frac{m_o}{s} \sqrt{4.25} \tag{52}$$

Damit wird im Vergleichspolygonzug

$$\begin{aligned} m_{\Phi}^P &= \frac{m_o}{s} \sqrt{4.25 n} \\ m_q^P &= m_o \sqrt{\frac{4.25}{6}(2n^3 - 3n^2 + n)} \end{aligned} \tag{53}$$

Bei großer Glieder- bzw. Seitenzahl n brauchen in den Formeln (27), (40), (47), (50) und (53) jeweils nur die höchsten Potenzen von n berücksichtigt zu werden. Für lange Ketten bzw. Züge ergeben sich daher mit sehr guter Annäherung folgende Vergleichszahlen:

Kettenglied bzw. Zug	$m_L(m_o)$	$m_q(m_o)$	$m_{\Phi}\left(\frac{m_o}{s}\right)$	Werte für Diagonalen-viereck auf 1 gebracht		
				$\frac{m_L}{1}$	$\frac{m_q}{1}$	$\frac{m_{\Phi}}{1}$
Diagonalen-Viereck 	$0.95 \sqrt{n}$	$0.48 \sqrt{n^3}$	$1.55 \sqrt{n}$	1	1	1
Polygonzug 	$1.00 \sqrt{n}$	$1.19 \sqrt{n^3}$	$2.06 \sqrt{n}$	1.05	2.4	1.3
Gleichseitiges Dreieck $\triangle$	$1.00 \sqrt{n}$	$1.41 \sqrt{n^3}$	$2.45 \sqrt{n}$	1.05	2.9	1.6
Rechtw. gleichsch. Dreieck $\triangle$	$1.00 \sqrt{n}$	$1.82 \sqrt{n^3}$	$3.17 \sqrt{n}$	1.05	3.7	2.0



Aus dieser Tabelle sind folgende Schlüsse zu ziehen:

1. Bei einem Verhältnis des Arbeitsaufwandes von 5:4 liegen die Quer- und Richtungsfehler der Diagonalen-Quadratkette erheblich unter den Quer- und Richtungsfehlern von vergleichbaren Dreiecksketten.

2. Die Maßstabsübertragung in der Diagonalen-Viereckskette ist jener der Vergleichsketten und des Polygonzuges nur unerheblich überlegen.

3. Beim Vergleich des Quer- und Richtungsfehlers in der Diagonalen-Quadratkette mit denen des Polygonzuges ist zu bedenken, daß der Fehler der Brechungswinkel in beiden Konfigurationen gleich gesetzt wurde. In der Praxis wird jedoch die Winkelmessung mit dem Theodolit beim Polygonzug genauer sein als die Richtungsübertragung in der Streckenkette. Der Querfehler des Polygonzuges, nach (51) ausgedrückt durch den Winkelfehler m_β , ist:

$$m_{q(m)}^P = 0.009 m_\beta^{cc} \sqrt{n^3}.$$

Hieraus geht hervor, daß einem Streckenmeßfehler von $m_o = \pm 0.1 \text{ m}$ ($\frac{m_o}{s} = 1:100\,000$ bei $s = 10 \text{ km}$) ein Winkelmeßfehler von $m_\beta \approx \pm 5^{cc}$ im Polygonzug zukommt. Da die Brechungswinkel im Polygonzug meist genauer gemessen werden können, wird der Polygonzug bezüglich seiner Querabweichung und Richtungsübertragung der Diagonalen-Viereckskette im allgemeinen überlegen sein.

4. Die Möglichkeit zur Verprobung der Messungen, die bei der Diagonalen-Viereckskette durch die Überbestimmung jedes Gliedes gegeben ist, legt es nahe, die Kette dem Polygonzug überall dort vorzuziehen, wo es — wie auf dem grönländischen Inlandeis — auf eine Verprobung der Messungen im Felde ankommt.

Literatur:

- | | |
|---|---|
| <p>[1] Hammer, E.: Zur Ausgleichung von Streckennetzen. — ZfV 1911, S. 517—532.</p> <p>[2] Rinner, K.: Geometrie mit Strecken. — Schweiz. ZfV 1950, S. 176—180, S. 195—198.</p> <p>[3] Hubeny, K.: Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. — Österr. ZfV 1950, S. 103—112.</p> <p>[4] Schelling, G.: Über die Grundfigur und den Längsfehler in Streckennetzen. — Österr. ZfV 1952, S. 140—146, S. 187—192.</p> <p>[5] Schelling, G.: Zur Bestimmung von Funktionsgewichten in überbestimmten symmetrischen Streckennetzen. — Österr. ZfV 1953, S. 136—142.</p> <p>[6] Schelling, G.: Die Richtungsübertragung in Streckennetzen. — Österr. ZfV 1954, S. 129—143.</p> <p>[7] Schelling, G.: Ein Vergleich zwischen Triangu-</p> | <p>lationsketten mit Winkel- und Streckenmessung. — ZfV 1954, S. 225—230.</p> <p>[8] Wolf, H.: Bemerkungen zur Frage der Gestalt von Strecken-Ketten. — ZfV 1954, S. 231—234.</p> <p>[9] Arnold, K.: Zur Fehlertheorie der streckenmessenden Triangulation. — Dissertation Berlin 1952 (VEB Verlag Technik).</p> <p>[10] Gerke, K.: Über die Berechnung von Streckennetzen. — ZfV 1954, S. 164—174.</p> <p>[11] Hofmann, W.: Lagemessungen bei der Internationalen Glaziologischen Grönland-Expedition (EGIG) 1959. — ZfV 1958, S. 216—222.</p> <p>[12] Großmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. — Berlin 1953.</p> <p>[13] Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. II/1, 9. Aufl. 1931.</p> |
|---|---|